تقریب براوردگر بیِز، با رویکرد باورمندی و کاربرد آن در تعیین حق‌بیمه محصول گندم آبی در ایران

دکتر امیرتیمور پاینده نجف‌آبادی*، سهراب صدری**

بازنگری و تکمیل: حسین رسول‌اف (فراوند)

چکیده

در علم بیم‌سنجی یا آکچواری، فرمول باورمندی دقیق، هنگامی برقرار است که: نخست، توزیع اندازه ادعاها به خانواده نمایی تعلق داشته باشد؛ دوم، توزیع پیشین با توزیع اندازه ادعاها مزدوج باشد و سوم اینکه تابع زیان، مربع خطا در نظر گرفته شود. اگر هر کدام از شرایط پیشگفته، نقض شود، دیگر فرمول باورمندی دقیق برقرار نیست. در همین راستا، این مقاله به‌کمک روش حداقل میانگین مربعات خطا، رویکردی ساده و کاربردی برای نظریه باورمندی ارائه می‌دهد؛ بدینسان که (با در نظر گرفتن تابع زیانِ دلخواه و توزیع پیشینِ دلخواه) براوردگر بیِز (Bayes) را به‌وسیله ترکیبی محدب از میانگین مشاهدات و میانگین توزیع پیشین، تقریب می‌زند؛ که این همان فرمول باورمندی دقیق است. در ادامه نتایج به‌دست آمده، با فرض اینکه اندازه ادعاها به‌صورت لوگ مقعر توزیع شده باشد، به کلاس براوردگرهای باورمندی خطی گسترش داده خواهد شد. این مقاله با درهم آمیختن ایده‌های ارائه شده از سوی پاینده (در سال ۲۰۱۰) و پاینده و همکاران (در سال ۲۰۱۲) به‌دنبال ارائه روشی تقریبی مبتنی بر روشهای بیزی است. در پایان، فرمولهای به‌دست‌آمده برای تعیین حق‌بیمه محصول گندم آبی، به‌کار گرفته خواهد شد.

کلیدواژه‌ها:

تابع زیان، براوردگر بیز، فرمول باورمندی خطی، توزیع لوگ مقعر، بیمه محصولات زراعی.

* دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی — E-Mail: amirtpayandeh@gmail.com

** دانش‌آموخته کارشناسی ارشد بیم‌سنجی از دانشگاه شهید بهشتی — E-Mail: sohrab.sadri1366@gmail.com

مقدمه

نظریه باورمندی[1]، یکی از مهمترین زیرساخت‌های بیم‌سنجی[2] است. گرچـه نظریـه باورمنـدی، نزدیک به ۱۰۰ سال پیشینه دارد؛ ولی این نظریه پس از گسترش نظریه آمار بِیزی[3] و در پایـان دهه ۷۰ میلادی، برای نخستین بار در صنعت بیمه به‌کار گرفته شد. با ایـن حـال، باورمنـدی و روشهای مبتنی بر آن، طی سه دهه اخیر چنان مورد توجه قرار گرفته است که امروزه به‌عنـوان مهمترین روش در نرخگذاری تجربی شناخته می‌شود.

گرچه نظریه باورمندی بیش از چهار دهه است که در تعیین حق‌بیمه خودرو به‌کار می‌رود؛ ولی هنوز جایگاه واقعی خود را در صنعت بیمه و بویژه در بخش بیمه کشاورزی، پیدا نکرده اسـت و اقدامهایی که در این زمینه انجام گرفته نیز، (چه در ایران و چه در دیگـر کشـورها) بیشـتر بـه پژوهشهای دانشگاهی، محدود بوده است. از برجسته‌ترین پژوهشها و کاربردهایی که برای نظریه باورمندی در قلمرو بیمه کشاورزی در ایران انجام پذیرفته است، می‌توان به پایان‌نامه ارائه‌شـده ازسوی لیلا بیطرف، به راهنمایی دکتر سیامک نوربلوچی اشاره کرد (۵).

ویتنی[4] در سال ۱۹۱۴ برای نخستین بار، فرمول باورمندی خطی را معرفی کرد. بیلی[5] در سال ۱۹۵۰ رابطه آمار بیزی و فرمول باورمندی را نمایش داد و پس از آن بود که توجه بسیاری از آماردانان به این فرمول جلب شد. بیلی نشان داد که در مسئله براوردیابی بیزی، برپایه فرض اینکه: ۱- توزیع متغیرهای تصادفی به خانواده نمایی تعلق داشته باشد، ۲- توزیع پیشین

1. Credibility
2. Actuary
3 . Bayesian Statistics
4. Withney
5 . Bailey

مزدوج باشد و ۳- تابع زیان، مربع خطا در نظر گرفته شود، آنگاه براوردگر بیز[1] به‌دست‌آمده با فرمول باورمندی خطیِ معرفی‌شده از سوی ویتنی، یکسان خواهد بود.

این حقیقت، راه میانبری را برای محاسبه براوردگر بیز نشان می‌داد و آن نیز، به‌کاربردن فرمول باورمندی خطی بود؛ ولی سه شرطی که بیلی برای تحقق یافتن این هدف معرفی کرده بود، در عمل، بهره‌گیری از این ایده را به فراموشی می‌کشاند؛ بویژه در زمینه بیم‌سنجی که بیشتر داده‌ها، هیچ یک از این شرطها را نداشتند.

در سال ۱۹۶۷ بولمن[2] ثابت کرد که فرمول باورمندی خطی، آماره‌ای با توزیع آزاد (ناپارامتری) است که بدون نیاز به پذیرفتن فرضی درباره توزیع متغیرهای تصادفیِ مورد بررسی، برقرار است. بولمن، به همراه استراب[3] و لندزمن[4] موفق شدند، ساختار نظریه باورمندی را عوض کنند و بر چالشهای برگرفته از عضو خانواده نمایی نبودن و مزدوج نبودن توزیعهای پیشین چیره شوند؛ ولی با این همه، چالش برخاسته از به‌کارگرفته نشدن تابع زیان مربع خطا، همچنان برجای ماند.

در این مقاله، افزون بر ارائه روشی برای برطرف کردن مشکل یا چالش در زمینه شرط سوم (تابع زیان مربع خطا) نتایج به‌دست‌آمده، به کلاس براوردگرهای باورمندی خطی، تعمیم داده خواهدشد. به دیگر سخن، با به هم آمیختن ایده‌های ارائه شده از سوی پاینده در سال ۲۰۱۰ (۹) و پاینده و همکاران در سال ۲۰۱۲ (۱۰)، روشی تقریبی مبتنی بر روشهای بیزی ارائه خواهد شد و در پایان، به‌عنوان کاربردی برای فرمولهای ارائه شده، با در اختیار داشتن اطلاعات مربوط به شانزده سال گذشته بیمه محصول گندم آبی در کشورمان، حق‌بیمه این محصول را برای سال زراعی ۹۱-۱۳۹۰ پیشبینی خواهیم کرد.

---

1 . Bayes' Estimator
2. Buhlmann
3. Strub
4. Landsman

بنیادهای نظری پژوهش

سادگی فرمولهای اثبات‌شده در نظریه باورمندی و فراگیر و همگانی بودن فرضهای به‌کار رفته در آن، از مهمترین عواملی به‌شمار می‌آید که باعث گرایش و توجه روز افزون به این نظریه شده است. از سویی، نیاز و بایستگی در بهره‌گیری از فرمولهای ساده و کارامد در صنعت بیمه، بویژه در بخش کشاورزی، بیشترین نقش را در برگزیدن این رویکرد برای تعیین حق‌بیمه گندم آبی در این پژوهش، داشته است.

در ادامه این بخش، قضیه‌ها و روابطی که برای پیشبینی حق‌بیمه محصول گندم به‌کار خواهند رفت، معرفی می‌شود. در آغاز، چند واژه مهم برپایه موضوع پژوهش، تعریف می‌شود:

مورد بیمه: محصول زراعی یا دامی که زیر پوشش بیمه قرار می‌گیرد.

عوامل خطر زیر پوشش: عوامل خطر، عواملی هستند که اگر در طول دوره قرارداد بیمه، به مورد بیمه خسارت برسانند، بیمه‌گر موظف به پرداخت غرامت به بیمه‌گذار می‌شود.

بیمه‌گر: در اینجا، صندوق بیمه کشاورزی یا نمایندگان آن است که نسبت به اجرای برنامه بیمه بر طبق شرایط آیین‌نامه و مفاد قرارداد اقدام می‌کنند.

بیمه‌گذار: شخصیت حقیقی یا حقوقی است که محصول خود را با پرداخت حق‌بیمه مقرر در برابر عوامل خطر مشخص در آیین‌نامه بیمه هر محصول، بیمه می‌کند.

حق‌بیمه: مبلغی است که بیمه‌گذار برای بیمه شدن، به بیمه‌گر پرداخت می‌کند.

گزینه: گزینه نخست (گزینه عمومی): محاسبات، براساس هزینه تولید یک هکتار زراعت، انجام می‌گیرد. دیگر گزینه‌ها (گزینه انتخابی): محاسبات، براساس ارزش تولید یک هکتار زراعت، انجام می‌پذیرد.

غرامت: وجهی است که پس از رویدادن خطرهای زیر پوشش و ایجاد خسارت، براساس نظر کارشناس اعزامی، محاسبه، و برپایه ضوابط نگاشته‌شده در آیین‌نامه و دستورعمل اجرایی هر زراعت، تعیین، و به بیمه‌گذار پرداخت می‌شود. گفتنی است، میزان غرامت در زراعتهای گوناگون، متناسب با گزینه انتخابی، مرحله پیشرفت عملیات زراعی در زمان رویدادن خسارت، و درصد خسارت، متفاوت است و در هر حال، حداکثر مقدار آن در یک هکتار، از میزان حداکثر تعهد بیمه‌گر نگاشته شده در متن بیمه‌نامه، افزایش نخواهد یافت.

ضریب خطر: مجموع احتمال رویدادن هریک از عوامل خطر زیر پوشش بیمه است که طی دوره بیمه‌ای ممکن است پدید آید و از راه بررسی چندین ساله نتایج به‌دست‌آمده از عملکرد، محاسبه می‌شود و در تعیین حق‌بیمه برای هر محصول به‌کار می‌رود.

حداکثر تعهد بیمه‌گر: حداکثر تعهدات صندوق بیمه برای جبران خسارت هر واحد بیمه‌ای (هکتار، قطعه، رأس و مانند آن) است.

بیمه عمومی: ارائه خدمات پایه و فراگیر بیمه کشاورزی براساس وضعیت عمومی تولیدی واحدهای بهره‌بردار در بخش کشاورزی است.

بیمه تکمیلی: پوشش بیمه‌ای فراتری است که بیمه‌گذار براساس توان واحد تولیدی خود، آن را بر می‌گزیند و هنگام رخدادن خسارتهای احتمالی، از دریافت غرامت متناسب با آن، بهره‌مند می‌شود. فرمولها و شیوه محاسبه تعرفه و حق‌بیمه مورد بیمه گندم نیز، چنین است:

ضریب خسارت × حداکثر تعهد بیمه‌گر = تعرفه

حق‌بیمه سهم بیمه‌گذار + حق بیمه سهم دولت = هزینه اداری × تعرفه = کل حق‌بیمه

ارزش مورد بیمه ÷ غرامت پرداختی = ضریب خسارت

که در فرمولهای پیشگفته:

حداکثر تعهد بیمه‌گر: برابر با حداکثر میزان غرامت پرداخت شدنی در گزینه مربوط است.

ضریب خسارت: از هماهنگ (موزون) کردن ضریبهای خسارت از آغاز فرایند بیمه‌پذیری محصول تا سال مورد نظر، به‌دست می‌آید.

هزینه اداری: ثابت و برابر با ۱/۲ در نظر گرفته می‌شود.

ارزش مورد بیمه: از حاصلضرب سطح بیمه‌شده در حداکثر تعهد بیمه‌گر، به‌دست می‌آید.

در این بخش، دو لم[1] یا برهان کمکی مهم که در محاسبه براورد ضریب خسارت، به‌کار خواهد رفت، ارائه می‌شود. برای مشاهده دیگر لم‌ها (برهانهای کمکی)، قضایا و همچنین، برهانهای مربوط به آنها، می‌توانید به منابع معرفی‌شده، رجوع کنید.

برهان کمکی یا لم شماره یک: فرض کنید که $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ یک اتورگرسیو با چگالی شرطی زیر:

$$p(Y_1|\theta) \propto N(\theta,\sigma^2) \text{ و } p(Y_i|Y_{i-1}=y_{i-1},\theta) \propto N(\theta+\varrho y_{i-1},\sigma^2)\ \ ,\ \ i=2,3,4,\dots,n$$

برقرار است. همچنین، فرض کنید که توزیع پیشین $\pi(\theta) \propto N(\alpha,\beta^2)$ به‌طوری که پارامترهای $\varrho,\sigma,\alpha,\beta$ داده شده‌اند و پارامتر θ باید تعیین شود. آنگاه براوردگر بیز δ_π با در نظر گرفتن توزیع پیشین π و تابع زیان مربع خطا، چنین خواهد بود:

1. Lemma
در علوم ریاضیات، لِم یا برهان کمکی یا صغرای قیاس منطقی (در منطق)، به گزاره یا به قضیه‌ای گفته می‌شود که به‌عنوان ابزاری برای به اثبات رساندن برهانی دیگر یا قضیه‌ای بزرگتر، به‌کار برده می‌شود (سرویراستار).

$$\delta_{\pi}(\underline{Y}) = z_0\alpha + (1-z_0)\sum_{i=1}^{n}\omega_i Y_i$$

به گونه‌ای که: $z_0 = \sigma^2/(n\beta^2+\sigma^2)$ و $\omega_i = 1-\varrho, i = 1,2,\dots,n-1$ و $\omega_n = 1-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i$.

$\omega_n = 1-\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i$.

برهان: رجوع شود به پاینده و همکاران (۲۰۱۲) (۱۰).

در اینجا، پیش از ارائه لم بعدی، دو تعریف مهم را یادآوری می‌کنیم.

تعریف توابع چگالی لوگ مقعر متقارن:

متغیر تصادفی X با پارامتر مکانی θ دارای تابع چگالی لوگ مقعر متقارن f_0 است؛ اگر و تنها اگر رابطه $f_0(x,\theta) \propto \exp\{-k(x-\theta)\}$ برقرار باشد که در آن k یک تابع در کلاس توابع زیر است:

$$H^* := \{k: \text{متقارن حول صفر، صعودی و محدب است و مشتق آن مقعر است } k\}.$$

لگاریتم توزیع تجمعی یک توزیع لوگ مقعر، تابعی مقعر است. این واقعیت، کاربردهای مهمی در اقتصاد، ریاضیات مالی و مانند آن دارد. برای نمونه، از جمله توزیعهای لوگ مقعر، می‌توان به توزیعهای نرمال، لاپلاس و ویبل، اشاره کرد.

تعریف رده یا کلاس براوردگرهای خطی بولمن:

$$D = \{\delta_{\underline{\alpha}}: \delta_{\underline{\alpha}}(\underline{x}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\ , \alpha_0 \geq 0\,, \alpha_j \in [0,1]\,, j = 1,2,\dots,n\}$$

برهان کمکی یا لم شماره دو: فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ به شرط پارامتر ریسک θ دارای توزیع لوگ مقعر باشد. همچنین، فرض کنید δ_{π} براوردگر بیز تحت تابع زیان Ψ و تابع توزیع پیشین π باشد. آنگاه در رده یا کلاس حق‌بیمه‌های باورمندی خطی D براوردگر بهینه‌ای که از

یکسو، میانگین مربع خطای بین براوردگر بیز δ_π و براوردگر باورمندی خطی $\delta_{\underline{\alpha}}$ را کمینه

می‌کند، و از دیگر سو، آنتروپی شانون را بیشینه می‌کند، عبارت است از:

$$\delta_{\underline{\alpha}^*}(\underline{x}) = \alpha_0^* + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* x_k$$

به‌طوری که:

$$\alpha_0^* = \frac{E\,)\,\delta_\pi(\underline{X}\,)}{1+\sum_{i=1}^{n} \exp\{-\lambda\, E\,(\,\delta_\pi(\underline{X}\,)\,)cov(X_i, nX)/E(X_1)\}}$$

$$\alpha_k^* = \alpha_0^* \frac{\exp\{-\lambda E\left(\delta_\pi(\underline{X})\right) cov(X_k, n\bar{X})/E(X_1)\}}{E(X_1)} \quad , \qquad k = 1,2,\dots,n$$

و λ نیز، از معادله زیر به‌دست می‌آید

$$K_1(\lambda) = K_2(\lambda) \qquad (1)$$

که در آن $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ است و

$$K_1(\lambda) = cov\left(\delta_\pi(\underline{X}), n\bar{X}\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \exp\{-\lambda E\left(\delta_\pi(\underline{X})\right) cov\left(X_j, n\bar{X}\right)/E(X_1)\}\right)$$

$$K_2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{E\left(\delta_\pi(\underline{X})\right)}{E(X_1)} \exp\{-\lambda E\left(\delta_\pi(\underline{X})\right) cov\left(X_j, n\bar{X}\right) /E(X_1)\} cov\left(X_j, n\bar{X}\right)$$

به‌طوری که $\mathrm{E(Y)}$ نمایانگر امید دوگانه $\mathrm{E}_\pi(\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\theta))$ است و $\mathrm{Cov(Y,Z)}$ نمایانگر کوواریانس

دوگانه $\mathrm{E}_\pi(\mathrm{Cov}(\mathrm{Y},\mathrm{Z}|\theta)) + \mathrm{Cov}_\pi(\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\theta), \mathrm{E}(\mathrm{Z}|\theta))$ است.

برهان: رجوع شود به پاینده و همکاران (۲۰۱۲) (۱۰).

یافته‌های پژوهش و بحث

با توجه به این حقیقت که ادعاهای موجود در قراردادهای بیمه محصولات کشاورزی، بر پایه یکرشته عوامل طبیعی ناشناخته‌ای تدوین و منعقد می‌شود که نمی‌توان آنها را پیشبینی و یا از آنها جلوگیری کرد، از همین‌رو در این بخش، مدلهای سری زمانی (که می‌تواند برای مدلبندی بسیاری از عوامل طبیعی به‌کار رود تا یک براوردگر برای عامل ریسک θ به‌دست آورد) برای محصول بیمه گندم در ایران براساس ضریب خسارت بین سالهای ۱۳۷۴ تا ۱۳۹۰ به‌کار برده می‌شود. جدول شماره ۱، اطلاعات مربوط به بیمه محصول گندم را در ایران، بین سالهای ۱۳۷۴ تا ۱۳۹۰ نشان می‌دهد و باتوجه به فرمولهای مربوط به محاسبه حق‌بیمه محصول گندم، تکمیل شده است؛ به دیگر سخن، مقادیر ضریب خسارت، سطح بیمه‌شده و غرامت پرداخت‌شده، از صندوق بیمه کشاورزی استعلام شده و دیگر موارد، براساس فرمولهای بخش پیشین، محاسبه و ارائه شده است. در ادامه این بخش نیز، با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای SPSS و Mini TAB، به تحلیل داده‌های این جدول خواهیم پرداخت.

جدول شماره ۱: اطلاعات مربوط به بیمه محصول گندم در ایران، بین سالهای ۱۳۷۴ تا ۱۳۹۰

سال زراعی	سطح بیمه‌شده (هکتار)	غرامت پرداختی (میلیون ریال)	ضریب خسارت	حداکثر تعهد (میلیون ریال)	براورد ضریب خسارت با فرمولهای صندوق
۷۴-۷۵	۱۳۰۵۹۴۲	۹۱۷۲	۰/۰۱۷۵	۰/۴۰۱۳۳۰۴	۰/۰۱۷۵۰۰۰
۷۵-۷۶	۱۱۳۴۹۶۶	۱۲۱۶۱	۰/۰۲۶۸	۰/۳۹۹۸۰۸۱	۰/۰۲۱۸۱۵۵
۷۶-۷۷	۱۱۲۷۷۳۴	۲۵۱۹۷	۰/۰۴۶۵	۰/۴۸۰۴۹۵۴	۰/۰۳۰۶۱۶۸
۷۷-۷۸	۱۲۰۹۵۶۲	۹۹۳۲	۰/۰۱۱۰	۰/۷۴۶۴۷۶۱	۰/۰۲۳۳۰۵۸
۷۸-۷۹	۹۵۲۱۹۷	۱۳۲۹۱	۰/۰۱۶۰	۰/۸۷۲۳۹۰۴	۰/۰۲۱۴۴۰۴
۷۹-۸۰	۸۲۴۳۷۹	۳۵۳۱۰	۰/۰۳۰۰	۱/۴۲۷۷۴۱۴	۰/۰۲۳۷۱۴۴
۸۰-۸۱	۱۰۴۲۸۰۶	۸۲۲۳۸	۰/۰۵۰۰	۱/۵۷۷۲۵۲۴	۰/۰۳۰۸۳۰۹
۸۱-۸۲	۱۲۷۴۳۷۷	۱۲۰۰۱۰	۰/۰۶۲۰	۱/۵۱۸۸۹۰۷	۰/۰۳۸۳۶۲۳
۸۲-۸۳	۱۳۲۱۰۶۰	۲۴۵۷۷۰	۰/۱۰۹۰	۱/۷۰۶۷۸۷۴	۰/۰۵۳۸۷۷۵
۸۳-۸۴	۱۵۱۰۳۳۶	۲۹۱۵۱۰	۰/۱۰۷۲	۱/۸۰۰۴۶۹۸	۰/۰۶۵۰۴۴۴
۸۴-۸۵	۱۴۴۹۷۰۸	۳۵۶۲۰۵	۰/۱۰۰۰	۲/۴۵۷۰۸۱۷	۰/۰۷۲۵۶۹۳
۸۵-۸۶	۱۲۴۷۵۲۶	۲۲۴۰۷۲	۰/۰۷۹۲	۲/۲۶۷۸۴۰۷	۰/۰۷۳۵۳۷۵
۸۶-۸۷	۷۹۷۳۴۴	۶۳۳۹۶۹	۰/۳۲۳۴	۲/۴۵۸۵۶۹۰	۰/۰۹۶۴۹۴۱
۸۷-۸۸	۱۲۲۱۷۵۸	۹۶۹۰۱۹	۰/۱۹۷۸	۴/۰۰۹۷۸۲۸	۰/۱۱۵۴۱۱۱
۸۸-۸۹	۱۲۹۳۴۲۹	۱۱۹۹۴۸۸	۰/۱۶۴۹	۵/۶۲۳۸۳۶۲	۰/۱۲۶۱۵۳۹
۸۹-۹۰	۱۷۵۷۲۳۱	۲۱۴۵۱۴۸	۰/۲۴۶۸	۶/۹۴۶۳۳۲۱	۰/۱۵۱۰۰۲۴

برگرفته از: یافته‌ها و محاسبه‌های پژوهش

نخست، مقدار ضریب خسارت مورد انتظار برای سال زراعی ۹۱-۱۳۹۰ براورد می‌شود و در پایان، حق‌بیمه محصول گندم، با بهره‌گیری از فرمولهای مورد استفاده در صندوق بیمه کشاورزی، محاسبه خواهد شد.

از آنجاکه سری زمانی داده‌های ضریب خسارت، ناماناست، از همین‌رو، با بهره‌گرفتن از تبدیل لگاریتم، نامانایی این سری برطرف می‌شود. پس از برطرف کردن نامانایی سری، برای اطمینان یافتن از اینکه داده‌های تبدیل‌یافته، همچنان از توزیع نرمال برخوردارند، آزمون کولموگروف - اسمیرنوف و نمودار Q-Q نرمال، برای این داده‌ها انجام می‌گیرد که یافته‌های برگرفته از آنها، به‌ترتیب در جدول شماره ۲ و نمودار شماره ۱ نمایش داده شده است.

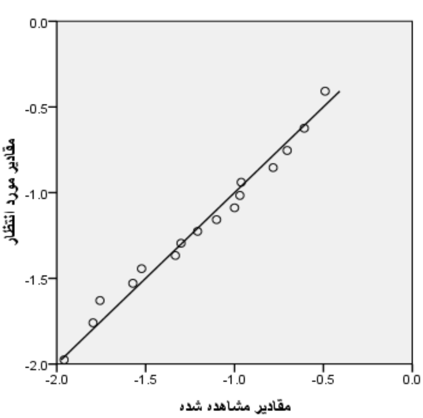
جدول شماره ۲: آزمون نرمال بودن توزیع لگاریتم ضریب خسارت از راه آزمون کلموگروف - اسمیرنوف

		لگاریتم ضریب خسارت
N		۱۶
Normal Parameters[a]	Mean	-۱/۱۹۱۶
	Std. Deviation	۰/۴۴۳۰۲
Most Extreme Differences	Absolute	۰/۱۰۵
	Positive	۰/۰۸۷
	Negative	-۰/۱۰۵
Kolmogorov-Smirnov Z		۰/۴۱۹
Asymp. Sig. (2-tailed)		۰/۹۹۵

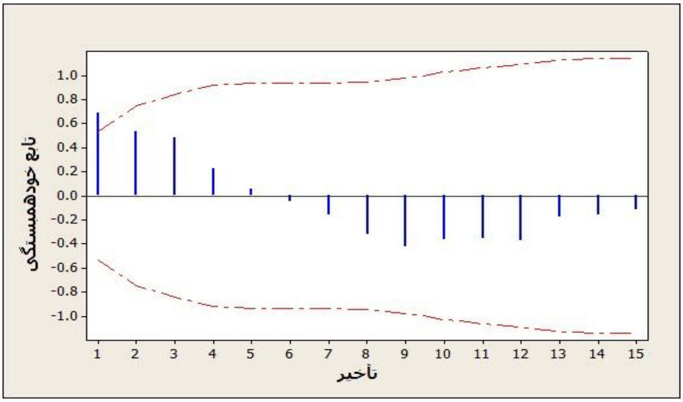
a. Test distribution is Normal.

برگرفته از: یافته‌های پژوهش

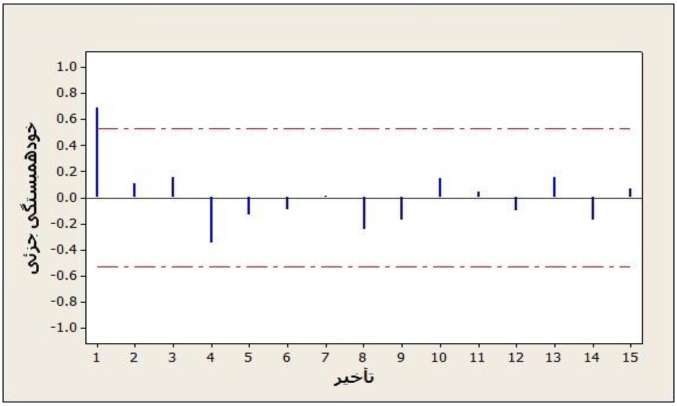
نمودار شماره ۱: نمودار Q-Q نرمال برای داده‌های لگاریتم ضریب خسارت



برای تشخیص دادن مدل مناسب برای سریِ زمانی داده‌های تبدیل‌یافته لگاریتم ضریب خسارت؛ یعنی $Y_i|\theta = Log_{10}(X_i|\theta)$، که در آن θ پارامتر ریسک است، نخست، نمودارهای توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی، برای سری زمانی لگاریتم ضریب خسارت ترسیم می‌شود. نمودار شماره ۲ نمایانگر تابع خودهمبستگی است و نمودار شماره ۳ نیز، نشاندهنده تابع خودهمبستگی جزئی برای سری زمانی لگاریتم ضریب خسارت است. این توابع، مدل اتورگرسیو مرتبه یک را به‌عنوان مناسبترین مدل پیشنهاد می‌کنند. از میان مدلهای درخور گزینش، مدل AR(1) بدون ضریب ثابت، به‌عنوان مدل نهایی انتخاب می‌شود. جدول شماره ۳، اطلاعات مربوط به مدلبندی سری بدون ضریب عرض از مبدأ را نمایش می‌دهد.



نمودار شماره ۲: تابع خودهمبستگی لگاریتم خسارت



نمودار شماره ۳: تابع خودهمبستگی جزئی لگاریتم ضریب خسارت

جدول شماره ۲: براورد پارامترهای مدل AR(1) بدون ضریب ثابت

نوع	ضریب	خطای استاندارد ضریب	آماره T	مقدار P	تکرار
AR(1)	۰/۹۹۸۱	۰/۰۵۲۳	۱۹/۱۰	۰/۰۰۰	۱۱

برگرفته از: یافته‌های پژوهش

با توجه به مطالب پیشگفته، مشخص شد که داده‌های تبدیل‌یافته لگاریتم ضریب خسارت به شرط پارامتر ریسک θ؛ یعنی $Y_i|\theta = Log_{10}(X_i|\theta)$ دارای توزیع نرمال با واریانس ثابت است و چون مدل ARMA(p,q) مناسب برای مدلبندی این داده‌ها، اتورگرسیو مرتبه یک است، می‌توان از لم شماره ۱ برای تقریب براوردگر بیز پارامتر θ بهره‌گیری کرد. برپایه نمادگذاری لم شماره ۱ برای متغیر تصادفی پارامتر ریسک θ فرض می‌کنیم که $\theta \sim N(0/40,0/25)$ است و با توجه به اینکه ضریب اتورگرسیو $\theta \sim N(0/40,0/25)$ است، متغیرهای تصادفی $\{Y_i\}_{i=1}^{16}$ توزیعهایی به‌شکل زیر دارد:

$$(Y_1|\theta) \sim N(\theta, 0/35)$$

$$(Y_i|Y_{i-1} = y_{i-1}, \theta) \sim N(\theta + 0/9981 y_{i-1}, 0/35)\,, \qquad i = 2,3,\dots,16$$

همچنین برای دیگر ضریبها داریم:

$$\omega_i = 1 - \varrho = 0/0019\,, \qquad i = 1,2,\dots,15$$

$\omega_{16} = 1 - \sum_{i=1}^{15} \omega_i = 0/9715$ و ضریب z_0 با بهره‌گیری از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$z_0 = \frac{\sigma^2}{n\beta^2 + \sigma^2} = 0/08046$$

اکنون با بهره‌گیری از لم شماره ۱ می‌توان براوردگر بیز δ را بدینسان، محاسبه کرد:

$$\delta(\underline{Y}) = z_0\alpha + (1 - z_0)) \sum_{i=1}^{16} \omega_i Y_i = -0/5429$$

اینک برای محاسبه‌ی براوردگر باورمند خطی بهینه δ_{opt} که در لم شماره ۲ معرفی شده است، نخست، با بهره‌گیری از رابطه شماره ۱، ضریب λ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{-Ln(z_0)}{n(\beta^2 + \sigma^2)} = 0/2625$$

برای محاسبه ضریبهای α^* پس از ساده‌سازی فرمولهای ارائه شده در لم شماره ۲، داریم:

$$\alpha_0^* = \frac{\alpha}{1 + n\exp\{-\lambda n(\beta^2 + \sigma^2)\}} = 0/17487$$

و به‌ازای $k = 1,2,\dots,15$ نیز، داریم:

$$\alpha_k^* = \alpha_0^* \frac{\exp\{-\lambda n(\beta^2 + \sigma^2)\}}{\alpha} = 0/03518$$

افزون بر اینکه:

$$\alpha_{16}^* = \alpha_0^* \frac{\exp\{-\lambda\, cov(Y_{16}, \bar{Y})\}}{\alpha} = 0/0364$$

سرانجام نیز، براوردگر بهینه باورمند خطی به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta_{opt}(\underline{y}) = \alpha_0^* + \sum_{k=1}^{16} \alpha_k^* y_k = -0/4966$$

اکنون برای محاسبه حق‌بیمه محصول گندم برای سال آینده، تنها نیاز است که تبدیل زیر را به‌کار برد تا ضریب خسارت متناظر با براوردگر بهینه باورمند خطی δ_{opt} به‌دست آید:

$$Y_i|\theta = Log_{10}(X_i|\theta) \Rightarrow X_i|\theta = 10^{\delta_{opt}}$$

به سخن دیگر، ضریب خسارت پیش‌بینی‌شده براساس اطلاعات ۱۶ سال گذشته که باید برای محاسبه تعرفه و کل حق‌بیمه محصول گندم برای دوره بعد به‌کار گرفته شود، برابر است با $10^{-0/4966} = 0/3187$.

در این راستا، جدول شماره ۴، تعرفه و کل حق‌بیمه محصول گندم را برای مقادیر حداکثر تعهد بیمه‌گر ۵، ۱۰ و ۲۰ میلیون ریالی ارائه می‌دهد.

جدول شماره ۳: تعرفه و کل حق‌بیمه محصول گندم برای سال زراعی ۹۰-۹۱ براساس براوردگر باورمندی

حداکثر تعهد بیمه‌گر (میلیون ریال)	تعرفه (میلیون ریال)	کل حق‌بیمه (میلیون ریال)
۵	۱/۵۹۳۵	۱/۹۱۲۲
۱۰	۳/۱۸۷	۳/۸۲۴۴
۲۰	۶/۳۷۴	۷/۶۴۸۸

برگرفته از: یافته‌های پژوهش

با توجه به یافته‌های جدول شماره ۴، چنانچه صندوق بیمه کشاورزی برای سال زراعی آینده، خواهان عقد قرارداد با کشاورز گندمکاری باشد که یک هکتار زمین زیر کشت محصول گندم دارد و صندوق نیز، حداکثر به میزان ۵ میلیون ریال محصول وی را بیمه کند، آنگاه، کل حق‌بیمه دریافتی از سوی صندوق ۱/۹۱۲۲ میلیون ریال خواهد بود.

مقایسه حق‌بیمه صندوق با حق‌بیمه باورمندی بهینه خطی

در آغاز، با بهره‌گیری از فرمولهایی که از سوی صندوق بیمه کشاورزی مورد استفاده قرار می‌گیرد، ضریب خسارت مورد انتظار را برای سال زراعی ۹۰-۹۱ براورد می‌کنیم:

$$\overline{X|\theta} = \frac{\text{مجموع تمام غرامتهای سالهای پیش}}{\text{مجموع ارزش مورد بیمه شده در تمام سالهای پیش}} = 0/151$$

به روشنی می‌توان دید، تفاوت آشکاری میان ضریبهای خسارت براورد شده با روش مورد استفاده در صندوق بیمه کشاورزی و روش به‌کار رفته در این پژوهش (مقاله) وجود دارد که باعث می‌شود، حق‌بیمه‌های این دو روش نیز، تفاوت بسیاری با یکدیگر داشته باشند. برای مشخص شدن این تفاوت، بهترین کار این است که جدول تعرفه و حق‌بیمه متناظر با ضریب خسارت براوردشده از راه فرمول صندوق بیمه کشاورزی را نیز ترسیم کنیم. جدول شماره ۵، تعرفه و حق‌بیمه محصول گندم را برای سال زراعی ۹۰-۹۱ براساس براوردگر صندوق و برای مقادیر حداکثر تعهد بیمه‌گر ۵، ۱۰ و ۲۰ میلیون ریالی، نمایش می‌دهد.

جدول شماره ۴: تعرفه و کل حق‌بیمه محصول گندم برای سال زراعی ۹۰-۹۱

براساس براوردگر صندوق بیمه کشاورزی

حداکثر تعهد بیمه‌گر (میلیون ریال)	تعرفه (میلیون ریال)	کل حق‌بیمه (میلیون ریال)
۵	۰/۷۵۵	۰/۹۰۶
۱۰	۱/۵۱	۱/۸۱۲
۲۰	۳/۰۲	۳/۶۲۴

برگرفته از: یافته‌های پژوهش

جمعبندی و پیشنهادها

با مقایسه داده‌های جدولهای شماره ۴ و ۵ می‌توان نتیجه گرفت که حق‌بیمه دریافت شده از سوی صندوق بیمه کشاورزی، به‌تقریب برابر با نصف حق‌بیمه پیشنهادی این مقاله است که اختلاف بسیار زیادی به‌شمار می‌رود. بی‌گمان، بهترین راه پیشِ روی صندوق بیمه کشاورزی این است که به جای بهره‌گیری از روشهای آماری ابتدایی، روشهای علمی پیشرفته‌تری را برای براورد پارامترهای مورد نظر خود، به‌کار گیرد.

از آنجا که نظریه باورمندی دارای توانمندی تعیین حق‌بیمه (یا هر پارامتر مطلوب دیگری) برای داشتمانی با طبقات ریسک متفاوت است و طبقه‌بندی کردن مناطق کشاورزی نیز برای کشوری همچون

ایران، با توجه به تنوع جغرافیایی بسیار در میان مناطق، کاری بایسته به‌نظر می‌رسد، از همین رو پیشنهاد می‌شود، نخست، طبقه‌بندی مناطق کشاورزی براساس پارامترهای ریسک مورد نظر، انجام گیرد و سپس برای هریک از این طبقه‌ها، روش ارائه‌شده در این مقاله، به‌کار گرفته شود تا محاسبه حق‌بیمه سال آینده برای آن طبقه و درنهایت برای کل کشور، صورت پذیرد.

در بخش کشاورزی، ممکن است خسارتهایی به‌صورت دوره‌ای تکرار شوند. برای نمونه فرض کنید که خشکسالی در دوره‌ای ده ساله به کشاورزی یک منطقه آسیب رسانده باشد و پس از آن، چند سال نیز شرایط عادی در آن منطقه برقرار باشد و آنگاه دوباره دوره جدیدی از خشکسالی در آن منطقه آغاز شود. در چنین حالتی پیشنهاد می‌کنیم، برای تعریف تابع $\mathrm{Cov}(X_i, X_k|\theta) = \gamma(\theta, t)$ از توابعی بهره‌گرفته شود که دارای دوره تناوب هستند (مانند توابع مثلثاتی).

با توجه به یافته‌ها و آنچه در این مقاله گفته شد، در اینجا به‌عنوان پیشنهادی کلی، در شرایطی که براوردگر بیز پارامتری محاسبه‌نشدنی است، پیشنهاد می‌کنیم که براوردگر بیز ناپارامتری محاسبه شود. فرمول باورمندی خطی بهینه، از این توانمندی برخوردار است که وزنهای بیشتری را به مشاهدات جدید، تخصیص دهد. این مزیت کاربرد گسترده‌ای در مطالعه داده‌های طولی دارد. از آنجا که در بیم‌سنجی، بیشتر داده‌های مورد بررسی از نوع داده‌های طولی است، پیشنهاد می‌کنیم که برای مطالعه چنین داده‌هایی، از رویکرد این مقاله بهره گرفته شود، به‌عنوان نمونه، می‌توان برای نرخگذاری تجربی از آن بهره‌جست.

در پایان پیشنهاد می‌شود، ایده به‌کار رفته در این مقاله، برای موارد زیر نیز، به‌کار گرفته شود:

۱- برای متغیرهای تصادفی با پارامتر ریسک کلی در قیاس با پارامتر ریسک مکانی.

۲- برای حق‌بیمه باورمندی در حالت کلی (برای نمونه، باورمندی برای روش ذخیره‌سازی نردبان زنجیره‌ای و حق‌بیمه‌های باورمند برای مدل پواسون آماسیده در صفر و دیگر موارد).

منابع:

۱. اکبری کوشکچه. ا، (۱۳۸۲)، «نظریه باورمندی و کاربردهای آن در صنعت بیمه». *فصلنامه صنعت بیمه*، ۷۱: ۱۳۵-۱۱۷.

۲. بهزادی. ح و شکوری. م، (۱۳۸۷)، «کاربرد نظریه باورمندی در پیش‌بینی تعداد خسارت‌ها در بیمه اتوموبیل». *فصلنامه صنعت بیمه*، ۹۲-۹۱: ۱۸۹-۱۶۱.

۳. صندوق بیمه محصولات کشاورزی، (۱۳۹۱)، «آشنایی با بیمه محصولات کشاورزی».

۴. مشکانی. م، (۱۳۹۲)، «تحلیل سریهای زمانی با برنامه‌های کاربردی در R»، مرکز نشر دانشگاهی.

۵. نوربلوچی. س و بیطرف. ل، (۱۳۸۱)، «تعیین حق‌بیمه به روش باورمندی بیزی و مدل‌های پویا»، *فصلنامه صنعت بیمه*، ۶۵: ۷۷-۵۹.

6. Lehmann, E. and Casella, G. (1998), Theory of point estimation, Second Edition, *Springer*.

7. Lehmann, E. and Romano, J. (2005), Testing Statistical Hypotheses, *Springer-Veerlag*.

8. Marchand, E. and Payandeh Najafabadi, A.T. (2011), “Bayesian Improvements of A MRE Estimator of A Bounded Location Parameter”, *Electronic Journal of Statistics*, 5: 1495–1502.

9. Payandeh Najafabadi, A.T. (2010), “A New Approach to the Credibility Formula”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 46:334–338.

10. Payandeh Najafabadi, A.T. and Hatami, H. and Omidi Najafabadi, M. (2012), “A Maximum-Entropy Approach to the Linear Credibility Formula”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 51:216–221.